FUNZIONI

DOMINIO

F. ALGEBRICHE

Razionali intere	$P(x)$	$\Rightarrow \forall x$
	$\lvert x \rvert$	$\Rightarrow \forall x$
Razionali fratte	$1/x$	$\Rightarrow x \neq 0$
Irrazionali	$\sqrt[n]{x}$	$\Rightarrow \forall x$ se n dispari ; $x \geq 0$ se n pari

F. TRASCENDENTI

Esponenziali	a^x	$\Rightarrow a > 0 ; a \neq 1 ; \forall x$
Logaritmiche	$\log_a x$	$\Rightarrow a > 0 ; a \neq 1 ; x > 0$
Goniometriche	$\sin x$	$\Rightarrow \forall x$
	$\cos x$	$\Rightarrow \forall x$
	$\tan x$	$\Rightarrow x \neq \pi/2 + k\pi$
	$\cot x$	$\Rightarrow x \neq k\pi$
	$\sec x$	$\Rightarrow x \neq \pi/2 + k\pi$
	$\csc x$	$\Rightarrow x \neq k\pi$
	$\arcsin x$	$\Rightarrow x \in [-1,1]$
	$\arccos x$	$\Rightarrow x \in [-1,1]$
	$\arctan x$	$\Rightarrow \forall x$
	$\text{arc cotan } x$	$\Rightarrow \forall x$

LIMITE DI FUNZIONE

$\lim_{x \to x_0} f(x) = L$ *se* $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : \forall \mid x - x_0 \mid < \delta \Rightarrow \mid f(x) - L \mid < \varepsilon$

$\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty$ *se* $\forall M > 0, \exists \delta > 0 : \forall \mid x - x_0 \mid < \delta \Rightarrow f(x) > M$

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = L$ *se* $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : \forall x > \delta \Rightarrow \mid f(x) - L \mid < \varepsilon$

$\exists \lim_{x \to +\infty} f(x) \Leftrightarrow$ limite destro = limite sinistro

OPERAZIONI

Somma algebrica	$\lim (f \pm g) = \lim f \pm \lim g$
Prodotto scalare	$\lim k f = k \lim f$
Valore assoluto	$\lim \mid f \mid = \mid \lim f \mid$
Prodotto	$\lim fg = \lim f \cdot \lim g$
Quoziente	$\lim f/g = \lim f / \lim g \quad (g \neq 0)$
Reciproco	$f > 0 , \lim f = 0 \Rightarrow \lim 1/f = +\infty$
	$f < 0 , \lim f = 0 \Rightarrow \lim 1/f = -\infty$
	$f \neq 0 , \lim f = \infty \Rightarrow \lim 1/f = 0$

TEOREMI

f minorata da costante	$f(x) \geq c \Rightarrow \lim f(x) < +\infty$ *oppure* $\lim f(x) = L \geq c$
Permanenza del segno	$\lim f(x) > 0 \Rightarrow \exists \delta > 0 : f(x) > 0$ in un intorno di x_0
"due carabinieri"	$f \leq g \leq h , \lim f = \lim h = L \Rightarrow \lim g = L$
	$f \leq g , \lim f = +\infty \Rightarrow \lim g = +\infty \qquad f \leq g , \lim g = -\infty \Rightarrow \lim f = -\infty$
Weierstrass	f continua su $[a,b] \Rightarrow f$ è dotata di max e min
Valori intermedi	f continua su $[a,b]$, $f(a)$ e $f(b)$ discordi $\Rightarrow \exists x \in [a,b] : f(x) = 0$
	conseguenza: l'immagine di una funzione continua su un intervallo è un intervallo

$x \to \infty$ $\quad \lim P(x) / Q(x) = \lim [a(x) / b(x)]$ dove a(x) e b(x) sono gli infiniti di ordine maggiore

$\lim P(x) / Q(x) = \lim [a(x) / b(x)]$ dove a(x) e b(x) sono gli infiniti di ordine minore

LIMITI NOTEVOLI

$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ $\qquad \lim_{x \to 0} \frac{\tan x}{x} = 1$ $\qquad \lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$

$\lim_{x \to +\infty} (1 + 1/x)^x = e$ $\qquad \lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^a} = +\infty$ $\qquad \lim_{x \to +\infty} \frac{\log x}{x} = 0$

(a>1) $\lim_{x \to -\infty} a^x = 0$ $\qquad \lim_{x \to +\infty} a^x = +\infty$

$\lim_{x \to 0+} \log_a x = -\infty$ $\qquad \lim_{x \to +\infty} \log_a x = +\infty$

(a>1, c>0) $\lim_{x \to 0+} x^c = 0$ $\qquad \lim_{x \to +\infty} x^c = +\infty$

(a>1, c<0) $\lim_{x \to 0+} x^c = +\infty$ $\qquad \lim_{x \to +\infty} x^c = 0$

CONTINUITA' f continua in x_0 *se* $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$

funzioni continue: costanti, razionali, a^x, $\log_a x$, x^a, $\sin x$, $\cos x$, $\tan x$, $\text{cotan } x$

f continua $\Rightarrow$ $|f|$, $\log |f|$ ($f>0$), $\sin f$, $\cos f$, a^f ($a>0$) continue

f,g continue $\Rightarrow$ $f \pm g$, fg, f/g ($g \neq 0$), kf, $|f|$, $f \circ g$, f^g ($f>0$) continue

STUDIO FUNZIONE

1) Dominio e continuità
2) Pari, dispari, periodica $\quad f(-x) = f(x) \Rightarrow f$ pari
   $f(-x) = -f(x) \Rightarrow f$ dispari
3) Intersezioni con gli assi $\quad f(0)$; $f(x) = 0$
4) Segno della funzione $\quad f(x) > 0$; $f(x) < 0$
5) Asintoti $\quad \lim_{x \to x_0} f(x) = \infty \Rightarrow x=x_0$ asintoto verticale
   $\lim_{x \to \infty} f(x) = c \Rightarrow y=c$ asintoto orizzontale
   $\lim_{x \to \infty} f(x)/x = m$, $\lim_{x \to \infty} (f(x)-mx) = q \Rightarrow y=mx+q$ as. obliquo
6) Derivata prima $\quad f'(x_0) > 0 \Rightarrow f$ crescente in x_0
   $f'(x_0) < 0 \Rightarrow f$ decrescente in x_0
7) Derivata seconda $\quad f''(x_0) > 0 \Rightarrow f$ concava verso l'alto in x_0
   $f''(x_0) < 0 \Rightarrow f$ concava verso il basso in x_0
8) Punti di transizione $\quad f'(x_0) = 0$, $f''(x_0) > 0 \Rightarrow x_0$ minimo relativo
   $f'(x_0) = 0$, $f''(x_0) < 0 \Rightarrow x_0$ massimo relativo
   $f''(x_0) = 0$, $f'''(x_0) > 0 \Rightarrow x_0$ punto di flesso ascendente
   $f''(x_0) = 0$, $f'''(x_0) < 0 \Rightarrow x_0$ punto di flesso discendente

INTERPOLAZIONE $p(x) = y_0 L_0(x) + y_0 L_0(x) + \ldots + y_0 L_0(x)$ interpola i dati (x_1, y_1)

$$L_i(x) = \frac{(x - x_0) \ldots (x - x_{i-1})(x - x_{i+1}) \ldots (x - x_n)}{(x_1 - x_0) \ldots (x_1 - x_{i-1})(x_1 - x_{i+1}) \ldots (x_1 - x_n)}$$

ORDINE $\quad f(x) = o(g(x))$ *per* $x \to x_0$ *se* $\lim_{x \to x_0} f(x)/g(x) = 0$

$f(x) = O(g(x))$ *per* $x \to x_0$ *se* $|f(x)| \leq C\,|g(x)|$ in un intorno di x_0

POLINOMIO DI TAYLOR $\quad f(x) - p(x) = o(x-x_0) \qquad p(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0)$

Resto $\quad \exists \xi : r_n(x) = f(x) - p_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$