6. DERIVAZIONE

6.1 LE DERIVATE DI FUNZIONI DI UNA VARIABILE

Derivata $f'(x) = dy/dx = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$ $(\lim = \pm\infty \Rightarrow f'(x) = \pm\infty)$

$f(x)$ derivabile in $x \Rightarrow f(x)$ continua in x

$f(x)$ pari $\Rightarrow f'(x)$ dispari ; $f(x)$ dispari $\Rightarrow f'(x)$ pari

Derivata a destra e a sinistra $f'_+(x) = \lim (\Delta y/\Delta x)$ $(\Delta x\to 0, \Delta x>0)$

$f'_-(x) = \lim (\Delta y/\Delta x)$ $(\Delta x\to 0, \Delta x<0)$

$\exists f'_+(x), \exists f'_-(x), f'_+(x) = f'_-(x) \Rightarrow \exists f'(x) = f'_+(x) = f'_-(x)$

Operazioni $(u\pm v)' = u' \pm v'$

$(uv)' = uv' + u'v$

$(Au(x) + Bv(x))' = Au'(x) + Bv'(x)$; $(\Sigma\, a_j u_j(x))' = \Sigma\, a_j u_j'(x)$

$(u/v)' = (vu' - uv')/ v^2$

Derivata di funzione composta $F(x) = f(\varphi(x)), y=\varphi(x) \Rightarrow F'(x) = f'(y)\, \varphi'(x)$

Derivata di funzione inversa $f(x)$ continua strettamente monotona, $f^{-1}(x)\neq 0 \Rightarrow (f^{-1}(x))' = 1/ f'(x)$

$\lim_{\Delta y\to 0} \frac{\Delta x}{\Delta y} = \infty \Rightarrow f'(x) = 0$; $\lim_{\Delta y\to 0} \frac{\Delta x}{\Delta y} = 0 \Rightarrow f'(x) = \begin{cases} +\infty & (f \text{ crescente}) \\ -\infty & (f \text{ decrescente}) \end{cases}$

DERIVATE DI ORDINE SUPERIORE

Derivata seconda $f'' = (f'(x))'$

Derivata n-esima $f^{(n)} = (\ldots(f'(x))'\ldots)' = (f^{(n-1)} (x))'$

Formula di Leibniz $f = uv \Rightarrow f^{(n)} = \Sigma\, C_{n,k}\, u^{(k)}\, v^{(n-k)} = uv^{(n)} + C_{n,1}\, u'\, v^{(n-1)} + \ldots + u^{(n)} v$ $(k=1,2,\ldots,n)$

DERIVATA DI FUNZIONE DI UNA VARIABILE DIPENDENTE

Derivata prima $\varphi'(u) = dy/du$

Derivata seconda $\varphi''(u) = (du\, d^2y - dy\, d^2u)/ du^3$

Derivata terza $\varphi'''(u) = [du^3 (d^2u\, d^2y + du\, d^3y - d^2y\, d^2u - dy\, d^3u) - (du\, d^2y - dy\, d^2u)\, 3\, du^2\, d^2u] / du^7$

6.2 LE DERIVATE DI FUNZIONI DI PIU' VARIABILI

DERIVATA PARZIALE DI FUNZIONE DI DUE VARIABILI

Derivata parziale seconda in (x,y), se sono derivate continue, si ha: $\partial^2 f/(\partial x \partial y) = \partial^2 f/(\partial y \partial x)$

Operatore di Laplace $\Delta u = (\partial^2 u/\partial x^2) + (\partial^2 u/\partial y^2)$

CAMBIAMENTO DI VARIABILI NELLE DERIVATE PARZIALI DI FUNZIONI DI DUE VARIABILI

Derivata prima data $z = f(x,y)$ con $x=\varphi(u,v)$ e $y=\psi(u,v)$ dove φ,ψ sono derivabili con continuità rispetto a u,v con jacobiano non nullo, vale:

$(\partial z/\partial x) = (D(z,y)/D(u,v)) / (D(x,y)/D(u,v))$

$(\partial z/\partial y) = (D(z,y)/D(u,v)) / (D(x,y)/D(u,v))$

cioè: $(\partial z/\partial x) = A\, (\partial z/\partial u) + B\, (\partial z/\partial v)$

$(\partial z/\partial y) = C\, (\partial z/\partial u) + D\, (\partial z/\partial v)$

Derivata seconda $\partial^2z/\partial x^2 = A^2\,(\partial^2z/\partial x^2) + 2AB\,(\partial^2z/\partial u\partial v) + B^2\,(\partial^2z/\partial v^2) + [\,A\,(\partial A/\partial u) +$
$+ B\,(\partial A/\partial v)\,]\,(\partial z/\partial u) + [\,A\,(\partial B/\partial u) + B\,(\partial B/\partial v)\,]\,(\partial z/\partial v)$
(stessa cosa per $\partial^2z/\partial x\partial y$ e $\partial^2z/\partial y^2$)

DERIVATA PARZIALE DI FUNZIONE DI TRE VARIABILI

Operatore di Laplace $\Delta u = (\partial^2u/\partial x^2) + (\partial^2u/\partial y^2) + (\partial^2u/\partial z^2)$

Derivata di funzione composta date: $u = f(x,y,z)$ derivabile in (x,y,z); $x=\varphi(t)$, $y=\psi(t)$, $z=\chi(t)$ con derivata in t;
$u = F(t) = f(\varphi(t), \psi(t), \chi(t)) \Rightarrow$
$F'(t) = f_x'(\varphi(t),\psi(t),\chi(t))\,\varphi'(t) + f_y'(\varphi(t),\psi(t),\chi(t))\,\psi'(t) + f_z'(\varphi(t),\psi(t),\chi(t))\,\chi'(t)$
$du/dt = (\partial f/\partial x)\,(dx/dt) + (\partial f/\partial y)\,(dy/dt) + (\partial f/\partial z)\,(dz/dt)$

METODO DEI DIFFERENZIALI (CAMBIAMENTO DI VARIABILI NELLE DERIVATE PARZIALI DI FUNZIONI DI TRE VAR.)

Derivate prime data $F_j(x,y,z,u,v,w)=0$ $(j=1,2,3)$, ponendo x,y variabili indipendenti e derivando si ha il sistema: $(\partial F_j/\partial x)\,dx + (\partial F_j/\partial y)\,dy + (\partial F_j/\partial z)\,dz + (\partial F_j/\partial u)\,du + (\partial F_j/\partial v)\,dv + (\partial F_j/\partial w)\,dw = 0$ di soluzioni:

$$\begin{cases} du = A_{1,1}\,dx + A_{1,2}\,dy + A_{1,3}\,dz \\ dv = A_{2,1}\,dx + A_{2,2}\,dy + A_{2,3}\,dz \\ dw = A_{3,1}\,dx + A_{3,2}\,dy + A_{3,3}\,dz \end{cases}$$

poiché $dw = (\partial w/\partial u)\,du + (\partial w/\partial v)\,dv$, si ottiene l'uguaglianza:
$dz = M\,dx + N\,dy$ e si trovano le derivate prime:
$\partial z/\partial x = M$; $\partial z/\partial y = N$

Derivate seconde calcolando i differenziali secondi si ha il sistema di soluzioni:

$$\begin{cases} d^2u = B_{1,1}\,dx^2 + B_{1,2}\,dx\,dy + B_{1,3}\,dy^2 + B_{1,4}\,d^2z \\ d^2v = B_{2,1}\,dx^2 + B_{2,2}\,dx\,dy + B_{2,3}\,dy^2 + B_{2,4}\,d^2z \\ d^2w = B_{3,1}\,dx^2 + B_{3,2}\,dx\,dy + B_{3,3}\,dy^2 + B_{3,4}\,d^2z \end{cases}$$

poiché $d^2w = (\partial^2w/\partial u^2)\,du^2 + 2\,(\partial^2w/\partial u\partial v)\,du\,dv + (\partial^2w/\partial v^2)\,dv^2 +$
$+ (\partial w/\partial u)\,d^2u + (\partial w/\partial v)\,d^2v$, si ottiene l'uguaglianza:
$d^2z = P\,dx^2 + 2Q\,dx\,dy + R\,dy^2$ e si trovano le derivate seconde:
$\partial^2z/\partial x^2 = P$; $\partial^2z/\partial x\partial y = P$; $\partial^2z/\partial y^2 = R$

DERIVATA PARZIALE DI FUNZIONE DI n VARIABILI

Incremento risp. a x_i passo h $\Delta_{x_j\,h}\,f(\mathbf{x}) = f(x_1,\dots, x_{j-1}, x_j+h, x_{j+1},\dots, x_n) - f(x_1,\dots, x_n)$

Derivata parziale rispetto a x_i $f_{x_j}'(\mathbf{x}) = \partial f(\mathbf{x}) / \partial x_j = \lim \Delta_{x_j\,h}\,f(\mathbf{x}) / h$ $(h\to 0)$

Derivate parziali prime $\partial f / \partial x_i$

Derivate parziali seconde $\partial^2 f / (\partial x_i\,\partial x_j)$

Derivate parziali terze $\partial^3 f / (\partial x_i\,\partial x_j\,\partial x_k)$

Derivata parziale associata a $\mathbf{k}$ dato $\mathbf{k}=(k_1,\dots, k_n)$ non negativo, la derivata parziale è associata a $\mathbf{k}$ se $\forall j$ l'operazione $\partial/\partial x_i$ si applica non più di k_j volte

Teorema se tutte le derivate parziali di $f(\mathbf{x})$ dipendenti da $\mathbf{k}$ sono continue in $\mathbf{x}$, in ciascuna di esse si può permutare a piacere l'ordine di derivazione

Derivata direzionale $\partial f(\mathbf{x})/\partial \boldsymbol{\omega} = \lim\limits_{t\to 0+} (\,f(\mathbf{x}+t\boldsymbol{\omega}) - f(\mathbf{x})\,) / t$

6.3 I DIFFERENZIALI DI FUNZIONI DI UNA VARIABILE

Funzione differenziabile
$f(x)$ differenziabile in $x \Leftrightarrow \Delta y = k\Delta x + o(\Delta x)$ $(\Delta x \to 0)$; $\Delta y \approx k\Delta x$
$k\Delta x$ = termine lineare principale dell'incremento (differenziale)
$f(x)$ derivabile in $x \Leftrightarrow f(x)$ differenziabile in x ; $k = f'(x)$

Differenziale primo
$dy = f'(x)\, dx \Rightarrow f'(x) = dy/dx$

Operazioni
$d(u \pm v) = du \pm dv$
$d(uv) = u\, dv + v\, du$
$d(u/v) = (v\, du - u\, dv)/ v^2$

Funzione inversa
$dy/dx = 1/(dx/dy)$

DIFFERENZIALE DI ORDINE SUPERIORE

Differenz. di n-esimo ordine
$d^n y = f^{(n)}(x)\, dx^n \Rightarrow f^{(n)}(x) = dx^n / d^n y$

Funzione composta
$y = \varphi(u),\ u = \psi(x)$; $y = f(x) = \varphi(\psi(x))$

Differenziali
$dy = f'(x)\, dx = \varphi'(u)\, du$ (invarianza)
$d^2y = f''(x)\, dx^2 = \varphi''(u)\, du^2 + \varphi'(u)\, d^2u$
$d^3y = f'''(x)\, dx^3 = \varphi'''(u)\, du^3 + 3\, \varphi''(u)\, du\, d^2u + \varphi'(u)\, d^3u$

6.4 I DIFFERENZIALI DI FUNZIONI DI PIU' VARIABILI

DIFFERENZIALE DI FUNZIONE DI TRE VARIABILI

Incremento
data $u = f(x,y,z)$ con derivate parziali continue in (x,y,z), il suo incremento è dato da: $\Delta u = (\partial f/\partial x)\, \Delta x + (\partial f/\partial y)\, \Delta y + (\partial f/\partial z)\, \Delta z + o(\rho)$ $(\rho \to 0)$
$\rho = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2}$

Differenziabilità
f differenziabile se $\Delta u = A\, \Delta x + B\, \Delta y + C\, \Delta z + o(\rho)$
$o(\rho)$ = termine che dipende da $\Delta x, \Delta y, \Delta z$ e che, quando $\Delta x, \Delta y, \Delta z$ tendono a 0, tende a 0 più rapidamente di $\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2}$
f è differenziabile in P $\Rightarrow$ f ha derivate parziali in P
f ha derivate parziali continue in P $\Rightarrow$ f è differenziabile in Pù

Differenziale
$df = (\partial f/\partial x)\, \Delta x + (\partial f/\partial y)\, \Delta y + (\partial f/\partial z)\, \Delta z$ (differenziale corrispondente agli incrementi $\Delta x, \Delta y, \Delta z$)

DIFFERENZIALE DI FUNZIONE DI N VARIABILI INDIPENDENTI

Differenziabilità
f ha derivate parziali prime continue in $\mathbf{x} \Rightarrow f$ differenziabile

Incremento
$\Delta f = \Sigma\, (\partial f/\partial x_i)\Delta x_i + o(\rho)\ (\rho \to 0)$ $\quad \rho = (\Sigma\ \Delta x_i^2)^{1/2}$

Differenziale del primo ordine
$df = \Sigma\, (\partial f/\partial x_i)\, dx_i$ = parte lineare principale dell'incremento di W in $\mathbf{x}$
dx_i sono detti differenziali indipendenti

Operazioni
$d\,(u \pm v) = du \pm dv$
$d\,(uv) = u\, dv + v\, du$
$d\,(u/v) = (v\, du - u\, dv) / v^2$ $(v \neq 0)$

Differenziale secondo
$d^2f = d(df) = \Sigma_i\, \Sigma_j\, (\partial^2 f/\partial x_i \partial x_j)\, dx_i\, dx_j$

Differenziale terzo
$d^3f = d(d^2f) = \Sigma_i\, \Sigma_j\, \Sigma_k\, (\partial^3 f/\partial x_i \partial x_j \partial x_k)\, dx_i\, dx_j\, dx_k$

DIFFERENZIALE DI FUNZIONE DI N VARIABILI DIPENDENTI

Funzione di variabili dipendenti	$W = f(\mathbf{x}) = f(x_1,\dots, x_n) = \varphi(\mathbf{u}) = \varphi(u_1,\dots, u_n)$; $u_i=\psi_i(\mathbf{x})$
Differenziale primo	$dW = \Sigma\, (\partial W/\partial x_i)\, dx_i = \Sigma\, (\partial W/\partial u_i)\, du_i$ (invarianza)
Differenziale secondo	$d^2W= \Sigma_i\, \Sigma_j\, (\partial^2 W/\partial x_i \partial x_j)\, dx_i\, dx_j = \Sigma_i\, \Sigma_j\, (\partial^2 w/\partial u_i \partial u_j)\, du_i\, du_j + \Sigma\, (\partial W/\partial u_i)\, d^2u_i$

DERIVATE NOTEVOLI

	generale		*particolare*	
Funzione costante	$(C)' = 0$	$(C\in\mathbb{R})$		
Funzione potenza (intera)	$(x^n)' = n\, x^{n-1}$	$(n\in\mathbb{N})$		
	$(1/x^n)' = -n/x^{n+1}$	$(n\in\mathbb{N};\ x\neq 0)$	$(1/x)' = -1/x^2$	$(x\neq 0)$
	$(x^k)' = k\, x^{k-1}$	$(k\in\mathbb{Z})$		
Polinomio	$(P_n(x))' = \Sigma\, k\, a_k\, x^{k-1}$	$(k=1,2,\dots,n;\ n\in\mathbb{N})$		
Funzione radice				
Funzione potenza (reale)	$(x^a)' = a\, x^{a-1}$	$(a\in\mathbb{R};\ x>0)$		
Funzione esponenziale	$(a^x)' = a^x \log a$	$(a>0)$	$(e^x)' = e^x$	
Funzione logaritmica	$(\log_a x)' = \dfrac{1}{x \log a} = \dfrac{\log_a e}{x}$	$(a>0;\ x>0)$	$(\log x)' = 1/x$	$(x>0)$
			$(\log \lvert x\rvert)' = 1/x$	$(x\neq 0)$
Valore assoluto	$(\lvert x\rvert)' = \operatorname{sign} x$			
Funzioni trigonometriche	$(\sin x)' = \cos x$			
	$(\cos x)' = -\sin x$			
	$(\tan x)' = 1/\cos^2 x = \sec^2 x$			
	$(\operatorname{cotan} x)' = -1/\sin^2 x = - \operatorname{cosec}^2 x$			
	$(\arcsin x)' = 1/\sqrt{1-x^2}$	$(-1<x<1)$		
	$(\arccos x)' = -1/\sqrt{1-x^2}$	$(-1<x<1)$		
	$(\arctan x)' = 1/(1+x^2)$			
Funzioni iperboliche	$(\sinh x)' = \cosh x$			
	$(\cosh x)' = \sinh x$			
	$(\tanh x)' = 1/\cosh^2 x$			
	$(\operatorname{cotanh} x)' = -1/\sinh^2 x$			
DERIVATE n-ESIME NOTEVOLI	$(x^m)^{(n)} = m\, (m-1) \dots (m-n+1)\, x^{m-n}$ $(m\in\mathbb{Z}^+)$; $n>m \Rightarrow (x^m)^{(n)} = 0$			
	$(x^a)^{(n)} = a\, (a-1) \dots (a-n+1)\, x^{m-a}$ $(a\in\mathbb{R})$			
	$(a^x)^{(n)} = a^x (\log a)^n$			
	$(e^x)^{(n)} = e^x$			
	$(\sin x)^{(n)} = \sin (x+n\pi/2)$ $(n\in\mathbb{Z}^+)$			
	$(\cos x)^{(n)} = \cos (x+n\pi/2)$ $(n\in\mathbb{Z}^+)$			